

## Problème 127 – La spirale du Rotella

Niveau : Terminale (Spécialité Maths) (accessible mais difficile à un niveau Première)

Chapitres : Suites numériques

Inédit, publié le 06/06/2020



Il n'est certainement pas aussi populaire que les Dragibus ou les Fraises Tagada, mais il est tout aussi reconnaissable immédiatement : le Rotella, cette spirale de réglisse qu'on trouve dans le rayon bonbon, a ses amateurs, surtout pour ceux qui s'amuse à dérouler la spirale avant de la déguster ! Dans ce problème, nous allons travailler autour d'une modélisation simplifiée de cette spirale.

Pour le former, on considère que le Rotella est une spirale de réglisse qui s'enroule autour d'elle-même en étant constituée d'une succession de demi-cercles reliant une suite de points  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , tous situés sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  – où  $O$  est le point central du bonbon et l'unité de longueur le cm (voir figure en **Annexe 1**). Pour information,  $A_0$  n'est pas le début du Rotella : il est le point à partir duquel ce modèle de spirale régulière peut s'appliquer. Le « bout de départ » avant  $A_0$ , d'environ 9 cm, se tortille en « s » au centre du bonbon : pour ce problème on ignorera ce « bout de départ ».

La construction de la spirale se fait alors selon les étapes suivantes :

\* Le point  $A_0$  est de coordonnées  $(-0,85 ; 0)$ .

\* Pour  $n \geq 0$ , un point  $A_{2n+1}$  est le point symétrique du point  $A_{2n}$  par rapport au point  $O'$  de coordonnées  $(0,13 ; 0)$

\* Pour  $n \geq 0$ , un point  $A_{2n+2}$  est le point symétrique du point  $A_{2n+1}$  par rapport à l'origine  $O$ .

Les demi-cercles joignant les points  $A_{2n}$  à  $A_{2n+1}$  sont centrés en  $O'$  et sont situés au dessus de l'axe des abscisses. Les demi-cercles joignant les points  $A_{2n+1}$  à  $A_{2n+2}$  sont centrés en  $O$  et sont situés en dessous de l'axe des abscisses. La spirale du Rotella tourne dans le sens horaire à partir de  $A_0$  jusqu'à un point  $B$ , qui est l'autre bout du Rotella (bien que la spirale du modèle, elle, pourrait en théorie continuer à l'infini).

On note  $(u_n)$  la suite telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'abscisse du point  $A_n$  est  $u_n$ .

*Remarque : le schéma de l'Annexe 1 est une aide pour comprendre le problème, mais il ne pourra en aucun cas servir de justificatif pour répondre aux questions du problème (sauf la question 5.d)).*

1) Calculer les abscisses  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$  des points respectifs  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$ .

2) Montrer que pour tout  $n \geq 0$  :  $u_{2n+1} = 0,26 - u_{2n}$  et  $u_{2n+2} = -u_{2n+1}$ .

3) On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  les suites telles que  $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ .

a) Déterminer l'expression de  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$ .

b) Préciser la nature des suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$ , et donner leurs caractéristiques.

c) Justifier que les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont respectivement strictement décroissantes et strictement croissantes, et en déduire que pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{2n} < 0$  et  $u_{2n+1} > 0$ .

4) a) On appelle, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(r_n)$  la suite qui à  $n$  associe le rayon du demi-cercle joignant  $A_n$  à  $A_{n+1}$ . Montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,  $r_{n+1} = r_n + 0,13$ .

*Indice : on pourra travailler par disjonction de cas, entre le cas pair et le cas impair.*

b) En déduire l'expression de  $r_n$  en fonction de  $n$ .

5) a) Etablir que, pour  $n \geq 0$ , la longueur  $L_n$  (en cm) de la spirale qui va successivement de  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ... jusqu'à  $A_n$  (cette spirale est composée d'une suite de demi-cercles) est égale à :

$$L_n = \pi \times (0,065n^2 + 0,915n)$$

b) On estime que la longueur de la spirale du Rotella à partir du point  $A_0$  jusqu'à  $B$  est de 42 cm (elle varie d'un bonbon à un autre). Justifier que le point  $A_8$  de la suite de points  $(A_n)$  est le dernier point du Rotella situé sur l'axe des abscisses avant le bout  $B$ .

c) Calculer l'angle  $(\overrightarrow{O'A_8}, \overrightarrow{O'B})$ .

*Indication : on pourra utiliser le demi-cercle  $A_8A_9$ , puis raisonner par proportionnalité entre la longueur de l'arc de demi-cercle entre  $A_8$  et un tout point  $M$  de l'arc, et l'angle au centre  $(\overrightarrow{O'A_8}, \overrightarrow{O'M})$ .*

d) En déduire les coordonnées de  $B$  dans le repère  $(O', \vec{i}, \vec{j})$  puis dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Annexe 1

